

Е. Ю. Щетинин, К. М. Назаренко

## Модель распределений вероятностных смесей экстремальных величин

*В работе предложена новая математическая модель вероятностной смеси экстремальных величин, разработаны и строго обоснованы эффективные алгоритмы ее моделирования и вычисления размеров рискового капитала по VaR-технологии. На примере ценовых данных индекса Dow Jones 01.01.1950 — 10.08.2005 был проведен сравнительный анализ расчетов оценок VaR с использованием порогового метода и модели вероятностной смеси, показавший высокую эффективность смешанной модели для вычисления рискового капитала инвестиционной компании.*

Современные финансовые рынки характеризуются значительными колебаниями стоимостных показателей их активов, что, как правило, негативно отражается на экономическом развитии как отдельных компаний, так и регионов, стран в целом. Все это, как следствие, приводит к высокой волатильности ценных бумаг на фондовых рынках, возрастанию рисков значительных убытков от инвестирования в них, а также возникновения существенного ущерба от некорректного формирования видов вложения капитала и ценных бумаг для инвестирования. В связи с этим, как отмечается Базельским комитетом по регулированию банковской деятельности, одной из актуальных и значимых задач управления рисками является формирование рискового капитала инвестиционной компании и корректное вычисление его величины [Basel Committee (2004)], [Щетинин (2005)].

Современный уровень развития финансовых рынков предъявляет высокие требования к математическим методам количественного анализа и управления рисками, все большее место среди которых занимают методы теории экстремальных величин [Galambos (1978)]. С точки зрения их практического применения для решения задачи вычисления достаточных размеров рискового капитала наиболее удобным является пороговый метод [Embrechts, Kluppelberg et al. (1997)]. Проведенные нами исследования рисков инвестирования на фондовых и страховых рынках с использованием порогового принципа показали, что в условиях высокой волатильности финансовых активов основной проблемой является оценивание порогового значения по выборке ценовых показателей финансовых активов [Щетинин, Назаренко (2003)]. Существующие в настоящее время модификации порогового метода не позволяют корректно решить эту проблему, поэтому целью данной работы является разработка нового теоретико-вероятностного подхода к моделированию экстремальных величин.

### 1. Пороговый метод моделирования экстремальных величин

Кратко изложим содержание порогового метода [Balkema, de Haan (1974)]. Обозначим через  $F(x)$  функцию распределения вещественной случайной величины  $X$  и пусть

$$F_u(x) = P(X \leq u + x | X > u).$$

Через  $x_\infty$  обозначим верхнюю крайнюю точку случайной величины  $X$ . Тогда согласно теореме Балкема — де Хаан  $X$  принадлежит области притяжения функции распределения экстремальных величин, тогда и только тогда, когда существует положительная вещественная функция  $a(u)$ , такая что

$$\lim_{u \rightarrow x_\infty} |F_u(xa(u)) - G_{\xi, \sigma}(x)| = 0, \quad (1)$$

где  $G_{\xi, \sigma}$  — обобщенное распределение Парето с параметрами  $\xi$  и  $\sigma$  [Pickands (1975)]. Это распределение имеет следующий вид.

$$G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - (1 + \xi x / \sigma)^{-1/\xi}, \quad (2)$$

если выполняется одно из условий:

- a)  $\xi > 0$  и  $x > 0$ ,
- b)  $\xi < 0$  и  $0 < x < -\sigma/\xi$ .

$$\text{и } G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - \exp(x/\sigma),$$

если  $\xi = 0$  и  $\sigma > 0$ .

Очевидно, что распределение имеет тяжелый хвост, если  $\xi > 0$ . Следовательно, для некоторого высокого порога  $u$ ,  $F_u(x)$  может быть аппроксимирована обобщенным распределением Парето (2) с соответствующими значениями параметров  $\xi$  и  $\sigma$ . На практике аппроксимация хвоста эмпирической функции распределения осуществляется по данным, превышающим порог  $u$ , причем параметр  $u$ , как правило, неизвестен. Таким образом, для строго обоснованного применения модели (2) хвоста эмпирического распределения, т. е. для справедливости теоремы Балкема — де Хаан (1), необходимо корректно оценить пороговую величину цензурирования, фактически описываемую параметром  $u$ . С одной стороны, величина порога  $u$  должна быть выбрана достаточно большой, что оставляет лишь небольшое количество членов выборки для оценивания параметров  $\xi$  и  $\sigma$ , ведет к возрастанию их вариаций; с другой стороны, слишком низкий порог чреват нарушением условия (1) и увеличением систематической ошибки их оценок.

В связи с изложенным, методы фиксированного выбора порога не позволяют решить задачу вычисления необходимого размера рискованного капитала финансовой компании, санкционирующего осуществление эффективных инвестиционных стратегий. В следующем разделе будет предложена и исследована новая модель функции распределения экстремальных данных, позволяющая более гибкое ее описание.

## 2. Метод моделирования вероятностной смеси экстремальных величин

Одним из эффективных направлений решения поставленной задачи является развитие адаптивных методов, не требующих предварительного выбора порога. В работе Дюпюи [Dupuis (2000)] предложен упрощенный механизм проверки модели для выбора порога. В этом методе каждой точке исходных данных присваивается некоторый вес от 0 до 1, более высокий вес означает достаточную точность аппроксимации. Несмотря на ее преимущества, все еще остается потребность использования порога для уровня весов.

В этом параграфе развивается адаптивный подход к моделированию функции распределения убытков, опирающийся на три следующих положения: во-первых, в отличие от порогового метода, при моделировании принимается во внимание вся выборка; во-вторых, в ка-

честве модели эмпирической функции распределения используется вероятностная смесь двух распределений, одним из которых является распределение (2); в-третьих, по мере стремления к  $x_{\infty}$ , доля случайных величин, имеющих распределение (2), является монотонно неубывающей функцией.

**Теорема 1.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — совокупность неотрицательных независимых или слабостационарных, одинаково распределенных, случайных величин, в которой доля значений, имеющих распределение (2), описывается возрастающей функцией  $p(x; \theta)$  (со значениями в  $(0, 1]$ ), такой что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x; \theta) = 1. \quad (3)$$

Тогда их плотность распределения имеет вид:

$$l(x) = \frac{[1 - p(x; \theta)] f(x; \beta) + p(x; \theta) g(x; \xi, \sigma)}{Z(\theta, \beta, \xi, \sigma)}, \quad (4)$$

где  $g(x; \xi, \sigma)$  — плотность распределения (2):

$$g(x; \xi, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1}; \quad (5)$$

$f(x; \beta)$  — некоторая другая плотность распределения,  
 $Z(\theta, \beta, \xi, \sigma)$  — нормализующая константа.

Доказательство приведено в работе Щетинина, Назаренко и Парамонова [Щетинин, Назаренко и др. (2005)]. Модель (4) является вероятностной смесью  $f$  и  $g$ , где смешивающая функция  $p(x; \theta)$  зависит от  $x$ . Согласно свойству (3) правый хвост  $l(x)$  определяется для больших  $x$  компонентом (2), тогда как левый хвост описывается с помощью функции  $f(x)$ .

В качестве модели (4) рассмотрим следующую:

$$p(x, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{x - \mu}{\tau} \right), \quad \theta = (\mu, \tau), \quad \mu, \tau > 0, \quad (6)$$

с параметрами локализации  $\mu$  и масштаба  $\tau$ . В качестве левого компонента смеси возьмем распределение Вейбулла, плотность которого имеет вид:

$$f(x; \beta, \lambda) = \beta \lambda^{\beta} x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^{\beta}}, \quad \beta, \lambda > 0. \quad (7)$$

Нормализующая константа в этом случае:

$$Z = \int_0^{\infty} \beta \lambda^{\beta} x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^{\beta}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{x - \mu}{\tau} \right) \right) dx + \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{x - \mu}{\tau} \right) \right) \left( 1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} dx.$$

Рассматриваемая плотность распределения  $l(x)$  (4) имеет шесть параметров:  $\beta$  и  $\lambda$  для компонента плотности Вейбулла,  $\mu$  и  $\tau$  — смешивающей функции  $p$ ,  $\xi$  и  $\sigma$  — для плотности распределения (5).

Тяжелохвостые распределения могут быть формально описаны с помощью понятия регулярно изменяющихся функций.

**Определение 1.** Измеримая функция  $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  является **регулярно меняющейся на бесконечности с индексом**  $\rho \in \mathbb{R}$ , если, для  $x > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho.$$

Множество таких функций будем обозначать через  $RV_\rho$ .

Если  $\rho = 0$ ,  $h$  называется **медленно меняющейся** (на бесконечности). Будем обозначать медленно меняющиеся функции через  $L$ . Если  $h \in RV_\rho$ , то  $h(x)/x^\rho \in RV_0$ . Далее, полагая  $L(x) = h(x)/x^\rho$ , получаем, что функция  $h \in RV_\rho$  представима как  $h(x) = L(x)x^\rho$ .

**Определение 2.** Говорят, что неотрицательная случайная величина является **регулярно меняющейся**, если ее функция распределения  $F$  удовлетворяет условию  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$  для некоторого  $\alpha \geq 0$ , где  $\bar{F} = 1 - F$ .

**Определение 3** (обобщенная обратимость). Пусть  $h$  — неубывающая на  $\mathbb{R}$ . Определим **обобщенную обратную**  $h$  следующим образом:

$$h^\leftarrow(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq u\}, \quad (8)$$

принимая  $\inf \emptyset = \infty$ .

Следующая теорема обосновывает свойства (2) введенной выше модели (4).

**Теорема 2.** Пусть  $p(x)$  — медленно меняющаяся возрастающая функция, принимающая значения на  $(0, 1]$ , для которой справедливо (3). Пусть  $f$  и  $g$  — два тяжелохвостых распределения, таких что  $P(X > x) \sim cx^{-1/\xi}$  для больших  $x$ . Обозначим их хвостовые индексы через  $\xi_g$  и  $\xi_f$  соответственно и предположим, что  $\xi_g < \xi_f$ , так что  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)/f(t) = 0$ . Тогда смесь  $(1 - p(x))f(x) + p(x)g(x)$  после нормализации на константу  $Z$  является плотностью с хвостовым индексом  $\xi_g$ .

Утверждение остается верным даже в том случае, когда  $f$  — легкохвостое распределение. Другим выбором для функции  $p$  может служить функция Хевисайда:

$$p(x, \theta) = \begin{cases} 1, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases} \quad (9)$$

В этом случае параметр  $\theta$  является порогом  $u$ , над которым в модели (4) участвует лишь компонент (2).

### 3. Алгоритм генерирования вероятностных смесей

Для моделирования величин с динамически смешанным распределением мы предлагаем использовать следующий алгоритм генерирования динамически смешанной выборки (4).

**Шаг 1.** Генерировать  $U$  равномерно на  $[0, 1)$ .

**Шаг 2.** Если  $U < 1/2$ , то генерировать  $x$  из  $f(x)$ ; взять  $x$  с вероятностью  $1 - p(x)$  и закончить; или с вероятностью  $p(x)$  вернуться к шагу 1.

**Шаг 3.** Если  $U \geq 1/2$ , то генерировать  $x$  из  $g(x)$ ; взять  $x$  с вероятностью  $p(x)$  и закончить; или с вероятностью  $1 - p(x)$  вернуться к шагу 1.

Следует пояснить, что на шаге 2  $x$  выбирается с вероятностью  $1 - p(x)$ , а с вероятностью  $p(x)$  алгоритм перезапускается, на шаге же 3, напротив,  $x$  выбирается с вероятностью  $p(x)$ , а с вероятностью  $1 - p(x)$  алгоритм перезапускается.

В работе выполнена калибровка модели (4) с использованием выборок, полученных при помощи алгоритма 1. Нами исследовались 12 различных комбинаций параметров. Использовались только положительные значения  $\xi$ , так чтобы  $l(x)$  и  $g(x)$  в формулах (4) и (5) были тяжелохвостыми. Для каждой комбинации параметров генерировались выборки размером  $N = 10\,000$ . На рис. 1 показаны плотности распределения для случаев 1 и 10 из табл. 1. В первом из них распределение Вейбулла унимодально, в то время как в случае 10 распределение Вейбулла не имеет моды.

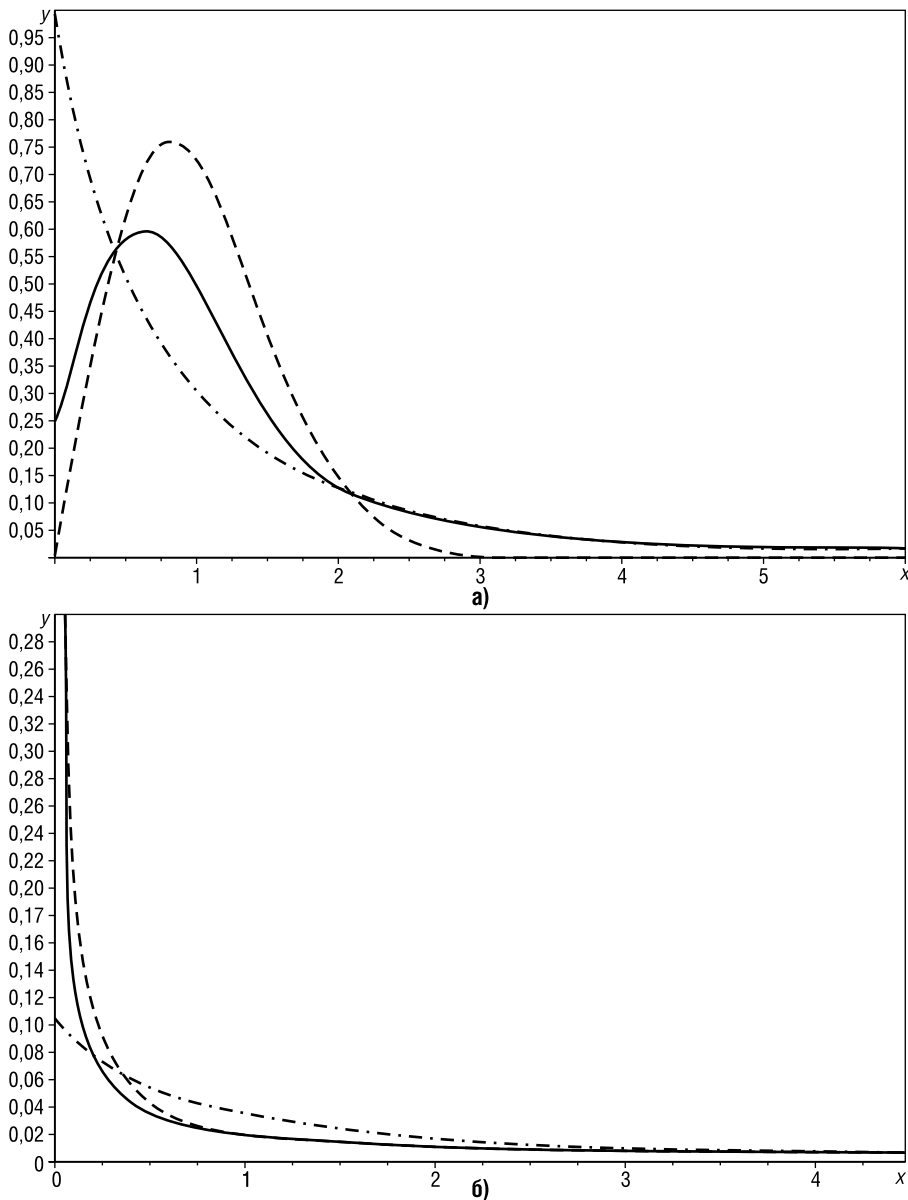


Рис. 1. Плотности распределения: а) для случая 1; б) для случая 10

Плотности смешанной модели  $l(x)$  — — — — —, компонентом  $f(x)$  — — — — —,  $g(x)$  — — . — . —

Форма плотности распределения Вейбулла в значительной степени зависит от значения параметра  $\beta$ . В случае  $\beta < 1$ ,  $f(x)$  не имеет моды и  $f'(x) < 0$  для всех положительных значений  $x$ , в случае  $\beta > 1$  функция  $f(x)$  унимодальна. В случае  $\beta = 1$ ,  $f(x)$  представляет собой экспоненциальное распределение. В экспериментах мы использовали значения  $\beta = 2,0$  и  $\beta = 0,5$ . Значение параметра  $\lambda$  выбиралось таким образом, чтобы математическое ожидание плотности распределения Вейбулла равнялась 1, т. е.  $\lambda = \Gamma(1 + 1/\beta)$ . В весовой функции мы использовали значения  $\mu \in \{0,5, 1,5\}$  и  $\tau \in \{0,5, 1,5\}$ . Значение параметра  $\xi$  выбиралось  $\xi \in \{0,25, 0,5, 1\}$ , в случае  $\xi = 1$  распределение имеет наиболее тяжелый хвост. Значение масштабирующего параметра обобщенного распределения Парето  $\sigma \in \{0,5, 1,5\}$ . Комбинации выбираемых значений параметров приведены в табл. 1 (с 1 по 12).

#### 4. Вычисление размеров рискованного капитала инвестиционной компании

Одной из основных проблем финансового риск-менеджмента является проблема достаточности рискованного капитала, т. е. капитала необходимого для покрытия убытков, неизбежно присутствующих в финансовой деятельности. Поэтому возникает задача определения величины рискованного капитала, текущей стоимости выданных кредитов и т. д., т. е. некоего критического уровня, превышение которого станет катастрофическим для предприятия [Щетинин, Назаренко и др. (2005)]. Обычно для оценивания размеров рискованного капитала применяется концепция *Value at Risk* (VaR) [Basel Committee (2004)].

$$VaR(q) = \inf\{x \in \mathfrak{R} : F_x(x) \geq q\} = x_q. \quad (10)$$

Используя выражение (8) для модели (4), можно получить оценку величины (10) как обобщенную обратную величину функции распределения с плотностью  $l(x)$ . Таким образом, VaR-технология на практике состоит в вычислении допустимого порогового уровня убытков компании, а именно условной квантили  $x_q$ .

Предложенная нами модель позволяет решить эту задачу следующим образом. Следуя введенным ранее обозначениям, определим значение порога  $x_\varepsilon$ :

$$x_\varepsilon = \{x : \inf_x (P(X > x, Z = 1 | A = 1) \leq \varepsilon)\}$$

для некоторого достаточно малого значения  $\varepsilon$ . Тем самым для  $X$ , имеющего плотность распределения  $l$ , пороговое значение  $x_\varepsilon$  определяется как

$$\varepsilon = P_l(X > x_\varepsilon \cap X \sim f(x))$$

и может быть найдено из уравнения:

$$\frac{\int_{x_\varepsilon}^{\infty} [1 - p(x)] f(x) dx}{\int_0^{\infty} [(1 - p(x)) f(x) + p(x) g(x)] dx} = \varepsilon,$$

которое в силу того, что  $f(x)$  имеет легкий хвост, а  $g(x)$  — тяжелый, эквивалентно следующему:

$$\frac{1 - p(x, \theta)}{p(x, \theta)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (11)$$

В табл. 2 приведены результаты оценивания порогового значения  $\hat{x}_\varepsilon$  для каждого из двенадцати случаев при  $\varepsilon = 0,001$ . В табл. 2 также приведены оценки параметров распределения (2), используются члены выборки, превосходящие  $\hat{x}_\varepsilon$ . Анализ табл. 2 позволяет сделать вывод о том, что выбор  $\hat{x}_\varepsilon$  в качестве порогового значения в большинстве случаев является оправданным.

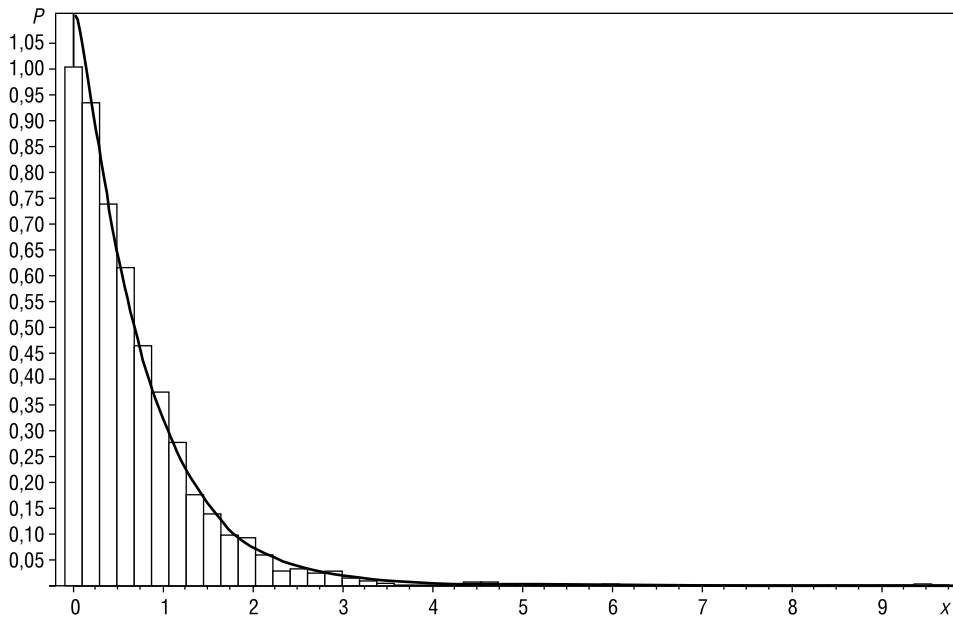


Рис. 2. Гистограмма логарифмических приращений индекса DJ и ее аппроксимация

В данном разделе мы используем смешанную модель для аппроксимации эмпирической функции распределения 4246 логарифмических приращений фондового индекса Dow Jones за период 01.01.1950 — 10.08.2005. На рис. 2 показана гистограмма распределения выборки и ее аппроксимация смешанной моделью. Полученные оценки параметров модели приведены в табл. 3, а значения  $VaR$  — в табл. 4.

## 5. Выводы

В работе предложена новая математическая модель вероятностной смеси экстремальных величин. На наш взгляд, многочисленные известные на текущий момент методы детерминированного выбора порога являются ограниченными в силу жесткого разделения исследуемых данных на экстремальные и неэкстремальные с последующей аппроксимацией распределения надпороговых величин обобщенным распределением Парето. В разработанной нами модели предлагается описывать область экстремальных величин, не выделяя их при этом из всей совокупности данных. Исходя из этого порог рассматривается как некоторая функция принадлежности членов выборки к одному из определенных выше классов случайных величин (Вейбулла или обобщенного распределения Парето).

На основе предложенного подхода разработаны и строго обоснованы эффективные алгоритмы моделирования смеси экстремальных величин и вычисления размеров рискованного капитала по  $VaR$ -технологии. На примере ценовых данных индекса Dow Jones 01.01.1950 — 10.08.2005 был проведен сравнительный анализ расчетов оценок  $VaR$  с использованием порогового метода и модели вероятностной смеси. Его результаты показали, что смешанная модель позволяет более точно оценить значение порога и соответственно вычислить размер рискованного капитала.

Комбинации значений параметров и их оценок  
методом максимального правдоподобия для размера выборки  $N = 10\,000$

Case	Weibull component parameters				Weight function parameters				GPD component parameters			
	$\beta$	$\hat{\beta}$	$\lambda$	$\hat{\lambda}$	$\mu$	$\hat{\mu}$	$\tau$	$\hat{\tau}$	$\xi$	$\hat{\xi}$	$\sigma$	$\hat{\sigma}$
1	2,0	2,059	0,886	0,888	1,0	1,001	1,0	1,007	0,5	0,496	1,0	0,998
2	2,0	2,126	0,886	0,914	1,0	0,739	1,0	1,066	0,25	0,193	1,0	1,061
3	2,0	2,055	0,886	0,883	1,0	0,975	1,0	1,099	1,0	1,018	1,0	0,962
4	2,0	2,103	0,886	0,815	1,0	0,836	1,0	0,661	0,5	0,519	0,5	0,440
5	2,0	1,933	0,886	0,894	1,0	1,088	1,0	1,081	0,5	0,459	5,0	5,376
6	2,0	1,809	0,886	0,904	0,5	0,730	1,0	1,837	0,5	0,451	1,0	1,122
7	2,0	2,004	0,886	0,881	5,0	4,973	0,5	1,059	0,5	0,502	1,0	1,002
8	2,0	1,891	0,886	0,860	1,0	1,095	5,0	0,470	0,5	0,490	1,0	0,988
9	2,0	2,046	0,886	0,877	1,0	0,418	1,0	5,122	0,5	0,498	1,0	0,994
10	0,5	0,495	2,0	2,002	1,0	0,929	1,0	0,859	0,5	0,497	1,0	0,988
11	0,5	0,506	2,0	2,044	1,0	0,926	1,0	0,829	0,25	0,257	1,0	0,967
12	0,5	0,530	2,0	2,047	1,0	0,628	1,0	0,327	1,0	0,995	1,0	1,027

Таблица 2

Оценки параметров обобщенного распределения Парето,  
полученные с использованием  $N$  членов выборки, превосходящих пороговое  
значение  $\hat{x}_\varepsilon$ , полученного из уравнения (11) для значения  $\varepsilon = 0,001$

Case	$\xi$	$\sigma$	$N = 1000$				$N = 10\,000$			
			$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$	$N$	$\hat{x}_\varepsilon$	$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$	$N$	$\hat{x}_\varepsilon$
1	0,5	1,0	0,356	1,402	165	2,72	0,506	0,950	1252	3,40
2	0,25	1,0	0,137	1,601	60	3,97	0,216	0,994	841	3,20
3	1,0	1,0	0,720	2,257	122	6,05	1,007	0,934	1946	3,44
4	0,5	0,5	0,113	1,982	58	3,00	0,373	0,876	455	3,70
5	0,5	5,0	0,396	5,133	483	2,70	0,431	5,115	4057	3,52
6	0,5	1,0	0,667	0,644	107	4,16	0,447	1,123	1059	3,94
7	0,5	1,0	0,078	3,338	62	4,06	0,329	2,082	741	4,09
8	0,5	1,0	0,412	1,205	161	3,00	0,465	1,068	1157	3,66
9	0,5	1,0	0,296	2,410	82	3,86	0,460	1,117	937	3,70
10	0,5	1,0	—	—	1	57,10	0,376	2,011	18	41,91
11	0,25	1,0	—	—	0	65,18	—	—	0	95,88
12	1,0	1,0	0,858	1,443	33	26,70	0,922	1,026	557	14,08

Таблица 3

Оценки параметров смешанной модели,  
полученные в результате аппроксимации данных индекса Dow Jones

Weibull component parameters		Weight function parameters		GPD component parameters	
$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$
1,415	1,2	0,545	1,935	0,25	0,5



Таблица 4

**Значения VaR для данных индекса Dow Jones, полученные при помощи смешанной модели**

$q$	0,95	0,99	0,999	0,9999	0,99999
$VaR_q$	2,14	4,169	9,1497	17,9757	33,6357

Таблица 5

**Анализ порогового значения для различных уровней значимости**

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$\hat{x}_\varepsilon$	3,91	4,82	5,50	6,15	6,89

Таблица 6

**Значения квантиля, полученного с помощью пороговой модели с различными значениями порога**

Порядок квантиля	Значение порога			
	3,91	4,82	5,50	6,15
0,95	1,5191(1,1565)	4,3542(0,8222)	2,9374(6,5416)	6,1463(0,0075)
0,99	2,8859(0,3931)	4,4704(0,5205)	3,7227(3,5226)	6,1463(0,0075)
0,999	5,3234(0,5527)	5,5427(0,9861)	5,8668(0,4732)	6,1487(0,0025)
0,9999	8,4777(2,7022)	14,2119(28,6882)	10,3917(9,1239)	23,9706(115,3777)
0,99999	12,5594(7,6629)	84,2984(446,7733)	19,9408(51,2386)	— (—)

В скобках указаны среднеквадратичные отклонения оценок.

**Список литературы**

Щетинин Е. Ю. О новых подходах к управлению компанией в чрезвычайных ситуациях // *Финансы и кредит*. 2005. № 30(198). С. 71–75.

Щетинин Е. Ю., Назаренко К. М., Парамонов А. В. О методах анализа эффективности бизнеса компании в условиях высокой изменчивости ее финансовых показателей. Динамика неоднородных систем. М.: КомКнига. 2005. № 9(2). С. 206–212.

Balkema A. A., de Haan L. Residual life time at great age // *Annals of Probability*. 1974. № 2. P. 792–804.

Basel Committee on Banking Supervision, 2004.

Dupuis D. J. Exceedance over high thresholds: A guide to threshold selection, 2000.

Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events // *Applications of Mathematics: Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer Verlag. 1997. № 33.

Galambos J. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics // John Wiley and Sons Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.

Pickands J. Statistical inference using extreme order statistics // *The Annals of Statistics*. 1975. № 3. P. 119–131.

Scshetinin E., Nazarenko K. Mathematical models and methods of estimation extreme values distribution functions // *Preprint JINR*, 2003.